Logique Formelle — Correction de la feuille d'exercices n°2

Mme Kempf — Logique des propositions

Exercice 1

La phrase suivante est-elle un théorème de (LP) ?

$$
\text{Si}\quad \left(
\begin{array}{l}
\left[\begin{array}{l}\text{Si } P_1 \text{ alors } (P_2 \vee P_3) \\ \text{sinon } (P_3 \vee P_4)\end{array}\right] \quad \wedge \\[2ex]
\left[\begin{array}{l}\text{Si } P_3 \text{ alors } \neg P_6 \\ \text{sinon } (P_4 \supset P_1)\end{array}\right] \quad \wedge \\[2ex]
\neg(P_2 \wedge P_5) \wedge (P_2 \supset P_5)
\end{array}
\right)
$$

$$\text{alors } \neg(P_3 \supset P_6)$$

On pourrait faire une table de vérité ou un arbre sémantique, mais on y perdrait beaucoup de temps.
Restent 2 méthodes : l'une est plutôt un raisonnement, l'autre est plutôt calculatoire.

◇ Raisonnement :La phrase donnée est de la forme $A \supset B$; elle est un théorème ssi elle ne peut prendre la valeur FAUX dans aucune interprétation. Or $\Im(A \supset B)$ est faux ssi $\Im(A)$ est vrai et $\Im(B)$ est faux. Regardons si c'est possible ici.

Par abus d'écriture on notera X au lieu de $\Im(X)$ dans la suite.

B est faux ssi $P_3 \supset P_6$ est vrai

i.e. $\left\{\begin{array}{l} P_3 \text{ faux} \\ \text{ou} \\ P_3 \text{ et } P_6 \text{ vrais}\end{array}\right.$

Etudions ces 2 cas pour voir si A peut être vrai :

<u>P_3 faux</u>

A devient : (si P_1 alors P_2, sinon P_4) $\wedge$ $(P_4 \supset P_1)$ $\wedge$ $\neg(P_2 \wedge P_5)$ $\wedge$ $(P_2 \supset P_5)$

A est alors vrai ssi chaque terme de la conjonction est vrai.

Le 1er terme est vrai si

1) P_1 et P_2 sont vrais

Dans ce cas $\neg(P_2 \wedge P_5)$ est vrai seulement si P_5 est faux, ce qui rend $(P_2 \supset P_5)$ faux, donc A faux

Ou si

2) P_1 est faux et P_4 est vrai

Ce qui rend $(P_4 \supset P_1)$ faux, donc A faux

<u>P_3 et P_6 vrais</u>

Le 1er terme de A devient : si P_1 alors vrai, sinon vrai

et le second : $\neg P_6$ est faux. La conjonction donne FAUX.

Dans les 2 cas, A est faux. Donc $A \supset B$ est un théorème.

◇ Méthode calculatoire :

On utilise, par exemple, si A alors B, sinon C ≡ $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C)$ et on simplifie l'expression.

On trouve alors une expression vraie quelles que soient les valeurs de vérité des P_i.

Exercice 2

Parmi les mots suivants de (LP) le(s)quel(s) est (sont) un (des) théorème(s) ?

Justifier la réponse par une démonstration pour les théorèmes et par un contre exemple pour les autres mots.

(m_1) $\neg B \supset (B \supset C)$

(m_2) $(A \supset B) \equiv ((B \supset C) \supset (A \supset C))$

(m_3) $(A \supset B) \supset ((\neg A \supset B) \supset B)$

(m_1) et (m_3) sont des théorèmes, pas (m_2).

En effet :

(m_1) $\equiv \neg\neg B \vee \neg B \vee C \equiv B \vee \neg B \vee C$ qui contient $B \vee \neg B$ donc est une tautologie.

(m_2) : Le membre de gauche équivaut à $\neg A \vee B$.

Le membre de droite équivaut à $\neg A \vee B \vee C$

Dans les cas où A et C sont vrais et B faux, les 2 membres de l'équivalence n'ont pas les mêmes valeurs de vérité.

(m_3) $\equiv \neg(\neg A \vee B) \vee (\neg(\neg\neg A \vee B) \vee B)$

$\equiv (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \vee B$

$\equiv ((A \vee \neg A) \wedge \neg B) \vee B$

$\equiv \neg B \vee B$ car $(A \vee \neg A)$ est une tautologie

Exercice 3

Soit α un connecteur défini par sa table de vérité :

A \ B	V	F
V	F	V
F	V	V

A α B

Donner un mot de (LP) équivalent à A α B en utilisant les connecteurs usuels.

$\neg B \vee \neg A$ ou encore $B \supset \neg A$ ou $A \supset \neg B$

Exercice 4

On dit qu'un ensemble de formules de (LP) est contradictoire lorsqu'il n'existe pas d'interprétation rendant toutes les formules vraies. Parmi les ensembles suivants, le(s) quel(s) est (sont) contradictoire(s) ?

$E_1 = \{A \vee \neg B,\ \neg A \vee B,\ \neg A \vee \neg B\}$

$E_2 = \{A \vee B \vee \neg C,\ A \vee B \vee C,\ \neg A \vee B \vee C;\ \neg B\}$

$E_3 = \{A,\ \neg B,\ A \wedge B\}$

E_1 n'est pas contradictoire : une interprétation I telle que : I(A) = I(B) = faux rend toutes les formules vraies.

E_2 n'est pas contradictoire : si I(A) = I(C) = vrai et I(B) = faux, toutes les formules de E_2 sont vraies.

E_3 est contradictoire puisque $I(A \wedge B)$= vrai ssi I(A) = I(B) = vrai et que, dans ce cas, $J(\neg B)$ est faux.